Criterio di Nyquist per la stabilità

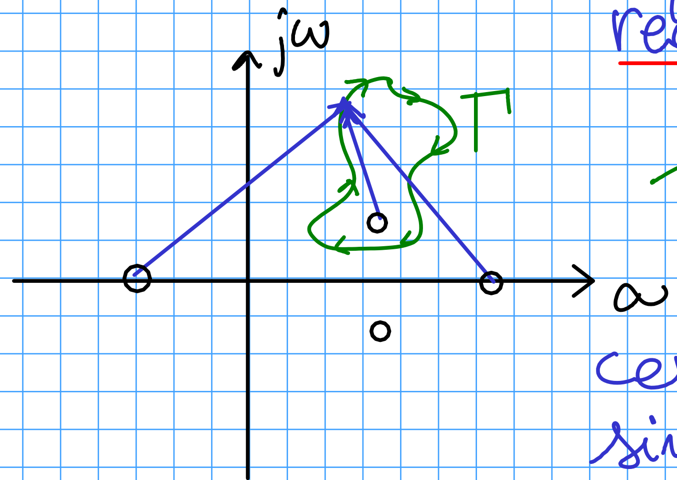
11 GEN

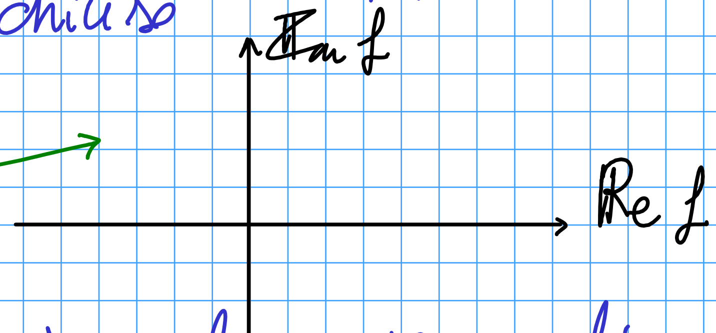
attraverso lo studio del βA (ad anello aperto) ricavo proprietà della rete ad anello chiuso

$$A(f) = \frac{\alpha A}{\boxed{1-\beta A}}$$

studio denominatore $1-\beta A$, in particolare gli zeri, che saranno i poli della rete completa (una volta chiusa reazione)

dimostrazione: voglio studiare la presenza di zeri/poli a parte reale positiva a ciclo chiuso

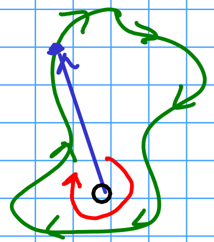




cerco metodo per evidenziare la presenza di singolarità a parte Re >0 al variare di ω

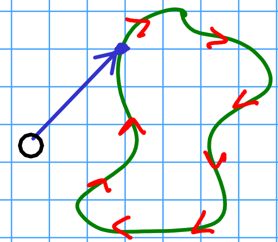
le varie singolarità contribuiscono alla fase di f solo se sono incluse nella superficie Γ

ogni polo/zero compreso in Γ contribuisce alla fase complessiva scorro Γ in senso orario



singolarità produce una variazione di fase di f di 2π al termine del giro

singolarità esterna non produce variazioni di fase



definisco f in modo da considerare tutte le singolarità (incluse in Γ e non)

$$f = K \frac{\prod_{i=0}^{m} (s - z_i)}{\prod_{j=0}^{n} (s - p_j)}$$

↳ il contributo dei poli avrà fase opposta, visto che sono al denominatore!

si ha:

$$\angle f = \sum \angle (s - z_i) - \sum \angle (s - s_{pj})$$

sono incluse tutte le singolarità, sia a parte $Re<0$ che $Re>0$, il loro contributo dipenderà dal percorso Γ

riassumendo

$\forall$ zero interno a Γ
- $Re<0 \longrightarrow +2\pi$
- $Re>0 \longrightarrow -2\pi$

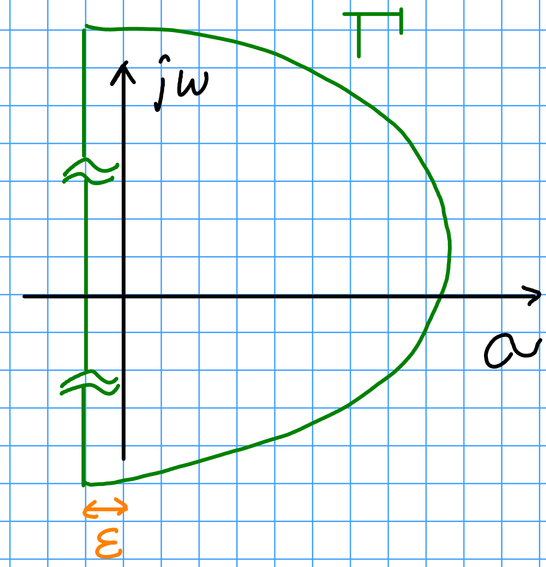
$\forall$ polo interno a Γ
- $Re<0 \longrightarrow -2\pi$
- $Re>0 \longrightarrow +2\pi$

problema si sposta sulla <u>scelta di Γ</u>

obiettivo analisi:

→ evidenziare la presenza di zeri a parte Re > 0

→ per ogni pulsazione ω (da $-\infty$ a $+\infty$)



scelto Γ in modo da considerare nella fase complessiva di f solo le singolarità a parte Re > 0

modificando i segni delle fasi la $\angle f$ diventa:

$$\angle f = 2\pi\,(N_{p+} - N_{z+})$$

<u>problema</u>

relazioni riferite attorno all'origine, ma si sta studiando $1-\beta A$! $\Longrightarrow$ nessun problema, "traslo" riferimento sul punto (1, 0) e misuro relazioni attorno alla nuova "origine"

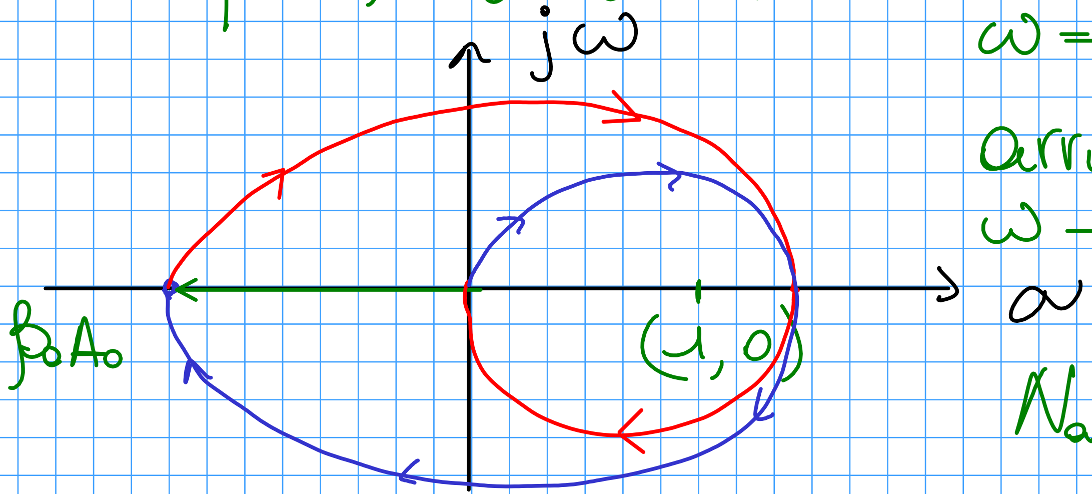
Come costruisco diagramma per ω negative (analisi da $-\infty$ a $+\infty$)?

βA è un polinomio complesso a coeff. reali, quindi vale la regola

$\beta A(-j\omega) = \beta A^*(j\omega)$ diagramma simmetrico!

esempio

βA con 3 poli, $\beta(0)A(0) < \emptyset$



$\omega = \emptyset$, fase π (segno $\beta(0)A(0)$)

arrivano poli, cala fase

$\omega \to +\infty$ fase $-\pi/2$

$N_{ao} = -2$

nota

si misurano rotazioni antiorarie

$\rightarrow$ eventuale presenza di zeri instabili nel βA sarà evidenziata da un numero di rot. antiorarie negativo ovvero rotazioni orarie

acvin.it

Enunciato Criterio di Nyquist

dal diagramma di Nyquist conto numero di rivoluzioni antiorarie intorno a punto (-1, 0)

n° zeri a parte Re positiva ad anello aperto

$$N° \text{ rivoluzioni antiorarie} = N_{p^+}^{AA} - N_{z^+}^{AA}$$

n° poli a parte Re positiva ad anello aperto

viene fornita solo variazione rispetto a sistema ad anello aperto

Hp sistema stabile $\longrightarrow N_{z^+}^{AA} = \emptyset$

se βA stabile ad anello aperto
$N_{p^+}^{AA} = \emptyset$ $\longrightarrow$ n° rivoluzioni antiorarie negative indicano direttamente la presenza di zeri a parte Re > 0
$\longrightarrow$ poli instabili a ciclo chiuso!

se βA ha poli a parte Re > $\emptyset$ ad anello aperto
$N_{p^+}^{AA} = N$ $\longrightarrow$ sistema è stabile se si avranno N rotazioni orarie (−N antiorarie)
$\longrightarrow$ sistema completo è stabile

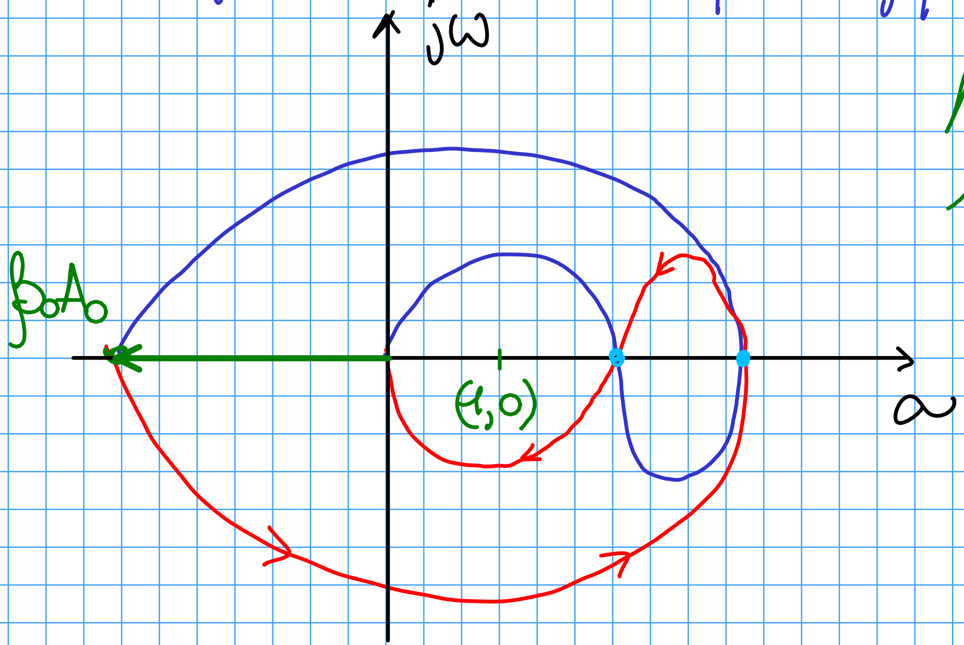
poli βA saranno zeri, ci concentriamo sugli zeri del βA (saranno poli)

Violazione criterio di Barkhausen

prendo un sistema con βA stabile, $N_{p+}^{AA} = \emptyset$, $\begin{cases} \beta_o A_o < \emptyset \\ |\beta_o A_o| > 1 \end{cases}$

per Barkhausen $\begin{cases} \angle \beta A = 0 \\ |\beta A| > 1 \end{cases}$ innesca oscillazione

verifico se è vero per Nyquist (con determinati poli e zeri di βA)



$N_{p+}^{AA} = \emptyset \longrightarrow$ per Nyquist sistema è stabile se $\underline{N_{ao} = \emptyset}$

↳ ok, verifica!

nonostante Barkhausen indichi instabilità, il <u>sistema è stabile</u>!

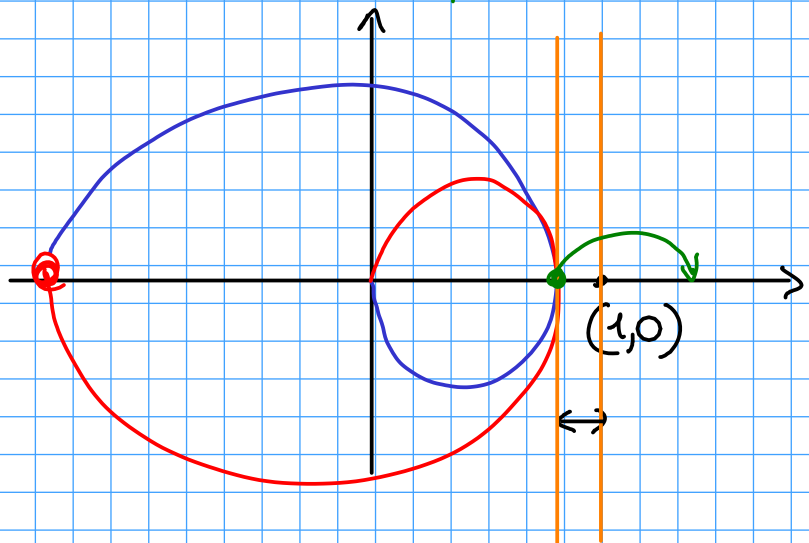
$\boxed{\text{CRITERIO DI BARKHAUSEN NECESSARIO MA NON SUFFICIENTE A GARANTIRE OSCILLAZIONE}}$

OK, ABBIAMO CRITERIO PER STUDIARE STABILITÀ DI UN SISTEMA RETROAZIONATO. È POSSIBILE STIMARE "QUANTO" SIA STABILE?

AL VARIARE DI PARAMETRI CIRCUITALI, TEMPERATURA, ...

ESEMPIO

SISTEMA STABILE, IN RETROAZIONE NON HO RIVOLUZIONI ATTORNO A $(1,0)$ $\longrightarrow$ STABILE



MA ALCUNE VARIAZIONI POTREBBERO AUMENTARE MODULO βA FINO A CIRCONDARE IL PUNTO $(1,0)$

$\longrightarrow$ SISTEMA INSTABILE!

INTRODUCO STRUMENTI PER "QUANTIFICARE" STABILITÀ:

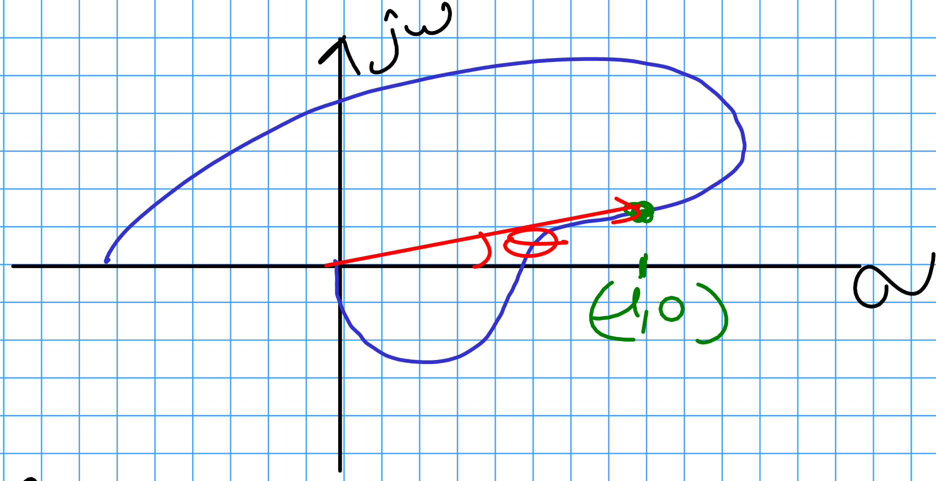
MARGINE DI GUADAGNO $\Big|_{dB}$ = VALORE TRA $|\beta A|\big|_{\angle \beta A = \emptyset}$ E RIFERIMENTO $\emptyset$ dB

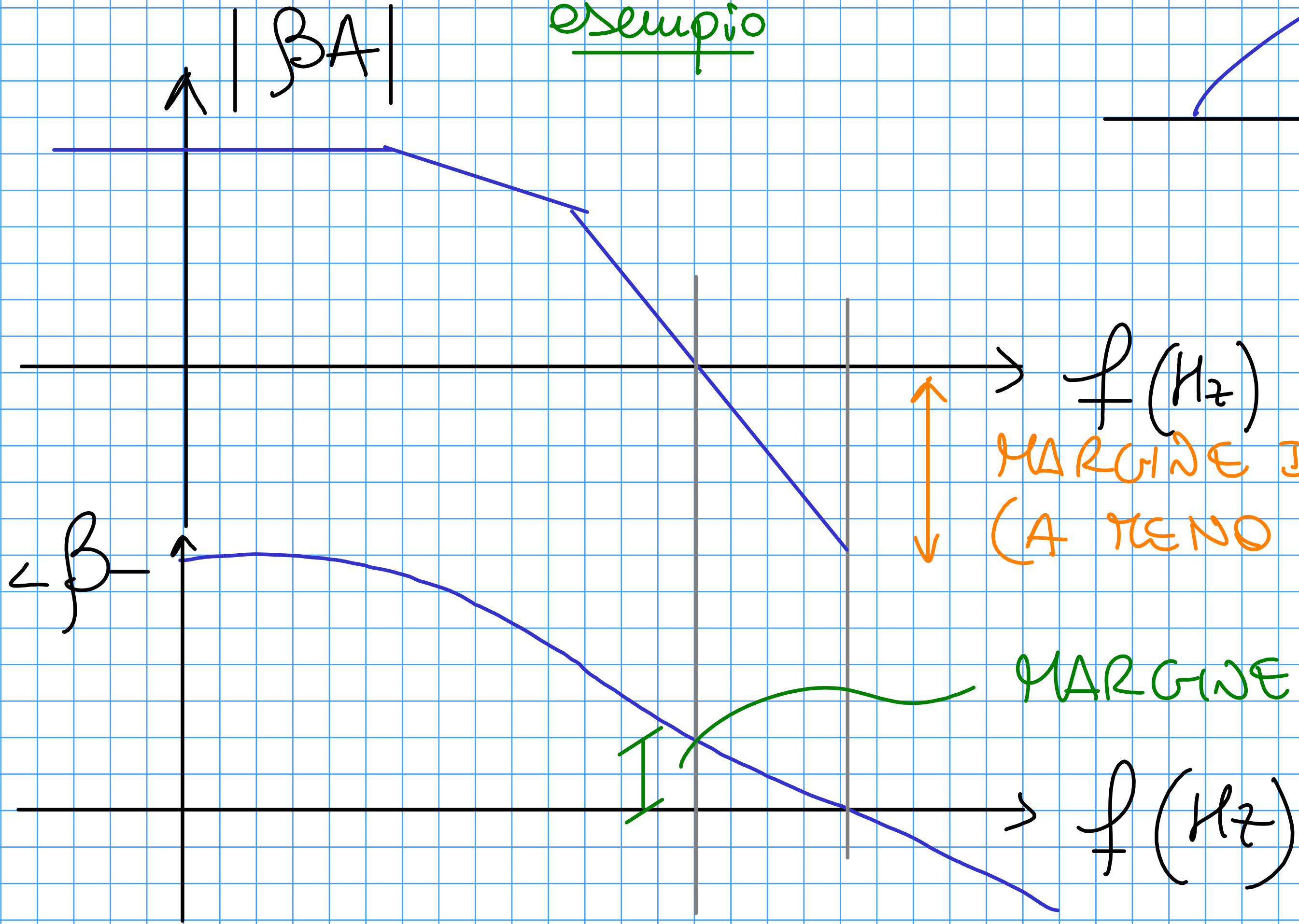
MARGINE DI FASE $\Big|_{dB}$ = VALORE $\angle \beta A\big|_{|\beta A| = \emptyset}$ E RIFERIMENTO

acvin.it

MARGINI SU BODE

esempio





MARGINE DI GUADAGNO
(A MENO DEL SEGNO)

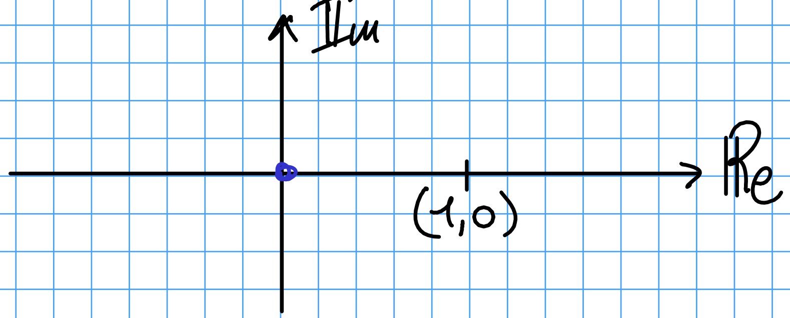
MARGINE DI FASE
(STANDARD ≈ $\pi/4$)

MAGGIORI SONO I MARGINI ⟶ MAGGIORE SICUREZZA

ESEMPI DIAGRAMMI NYQUIST

12 GEN

ZERO NELL'ORIGINE $\longrightarrow$ MODULO FA ZERO, MA CON QUALE FASE?



$\omega \to \emptyset$

$$\lim_{\omega \to 0} \angle \beta A = p\frac{\pi}{2} + a\pi$$

NUMERO ZERI NELL'ORIGINE (j^p)

$$a = \begin{cases} 0 & \text{SE } \beta_0 A_0 > 0 \\ 1 & \text{SE } \beta_0 A_0 < 0 \end{cases}$$

ESEMPIO

$$\beta A = \beta_0 A_0 \frac{s^2 (s - s_{z1})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2})} \longrightarrow$$

FASE INIZIALE π

$p = 2$, $a = 0$

$$\beta A = \beta_0 A_0 \frac{s (s - s_{z1})}{(s - s_{p1})(s - s_{p2})} \longrightarrow$$

FASE INIZIALE $\pi/2$

$p = 1$, $a = \emptyset$

$\omega \rightarrow +\infty$

$$\beta A \Big|_{s\to\infty} = \frac{a_m}{b_n}\frac{s^m}{s^n}\beta_0 A_0$$

DIPENDE DA VALORI m, n

SE $m = n \rightarrow \frac{a_m}{b_n}\beta_0 A_0$

SE $m < n \rightarrow \emptyset$

SE $m > n \rightarrow$ IMPOSSIBILE

CON QUALE FASE VA ALL'INFINITO ?

$$\beta A \Big|_{s\to\infty} = \frac{a_m}{b_n}\frac{s^m}{s^n}\beta_0 A_0 = \frac{a_m}{b_n}\frac{(j\omega)^m}{(j\omega)^n}\beta_0 A_0$$

$$\angle \beta A \Big|_{\omega\to+\infty} = \underline{a\pi - \angle j^{\,n-m}}$$

$$a = \begin{cases} 0 & \text{SE } \frac{a_m}{b_n}\beta_0 A_0 > 0 \\ 1 & \text{SE } \frac{a_m}{b_n}\beta_0 A_0 < 0 \end{cases}$$

acvin.it

CASO PARTICOLARE

1 SOLO POLO $\longrightarrow$ POSSO TRACCIARE NYQUIST IN MANIERA ESATTA

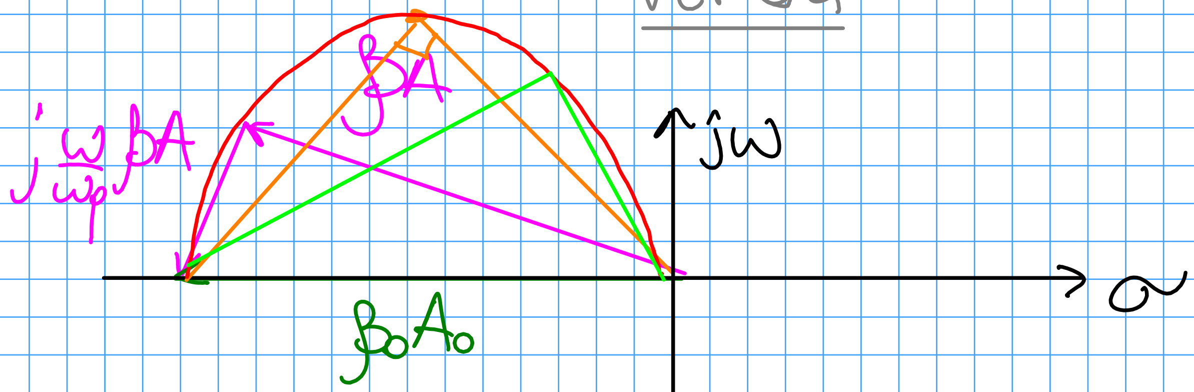
$$\beta A = \beta_0 A_0 \frac{1}{1 - s/s_p} = \beta_0 A_0 \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_p}}$$

CON $\beta_0 A_0 < 0$ NON HO INSTABILITÀ

VETTORI

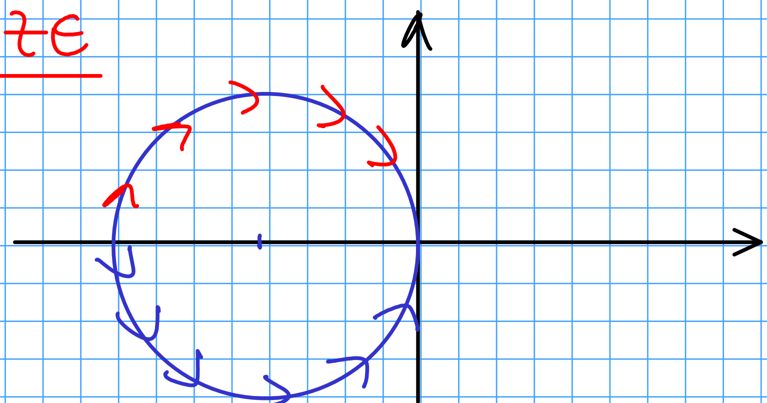
$$\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_p}\right)\beta A = \beta_0 A_0$$

$$\beta A + j\frac{\omega}{\omega_p}\beta A = \beta_0 A_0$$



$\rightsquigarrow$ NYQUIST DIVENTA LUOGO DEI TRIANGOLI COSTRUIBILI CON IPOTENUSA PARI A $|\beta_0 A_0|$

OTTENGO SEMICIRCONFERENZE

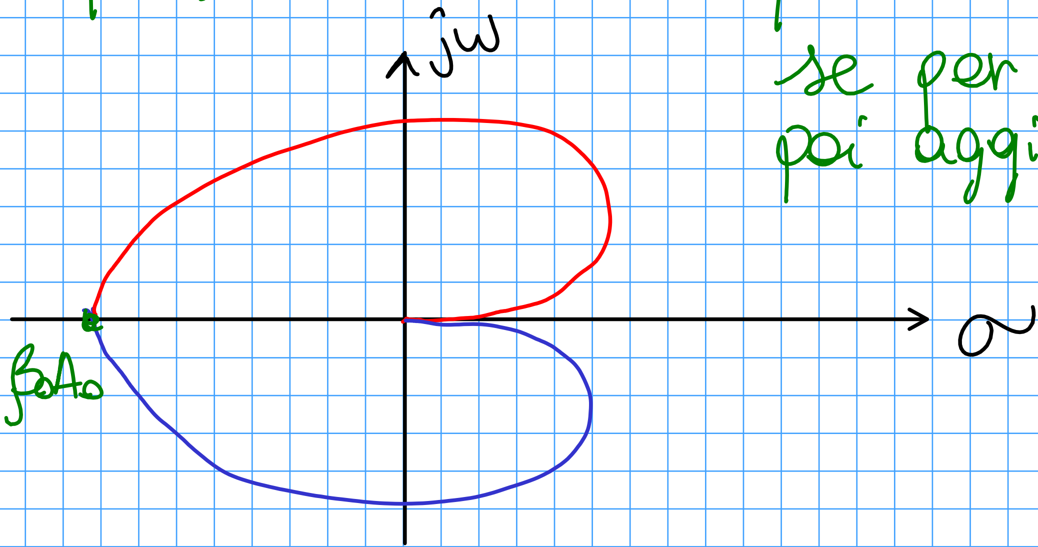


3 poli, 1 zero $\longrightarrow$ prima singolarità determina fase

se per Hp si ha prima polo $\longrightarrow -\pi/2$

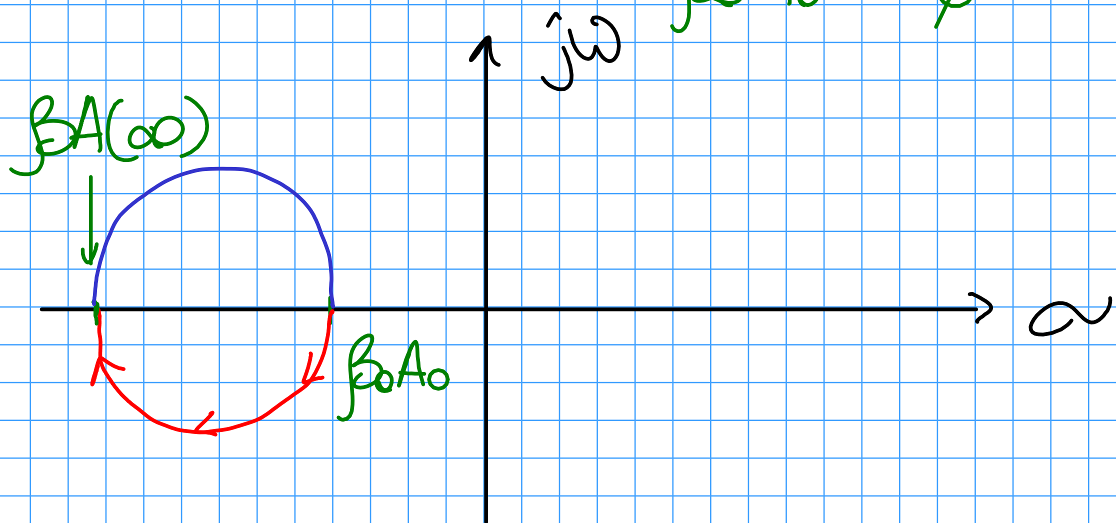
poi aggiungo fase $\beta_0 A_0 \longrightarrow \pi$

inizio $\pi/2$



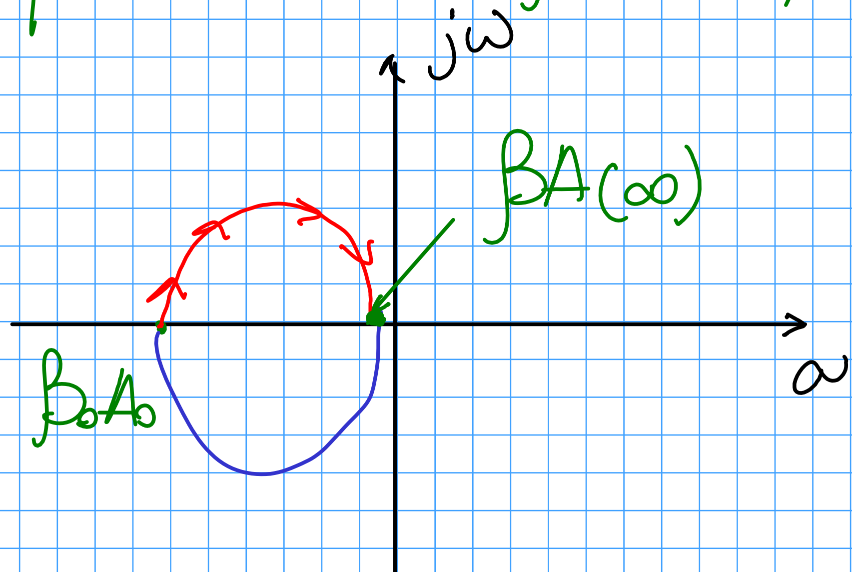
polo e zero

Hp zero prima $\beta_0 A_0 < \emptyset$

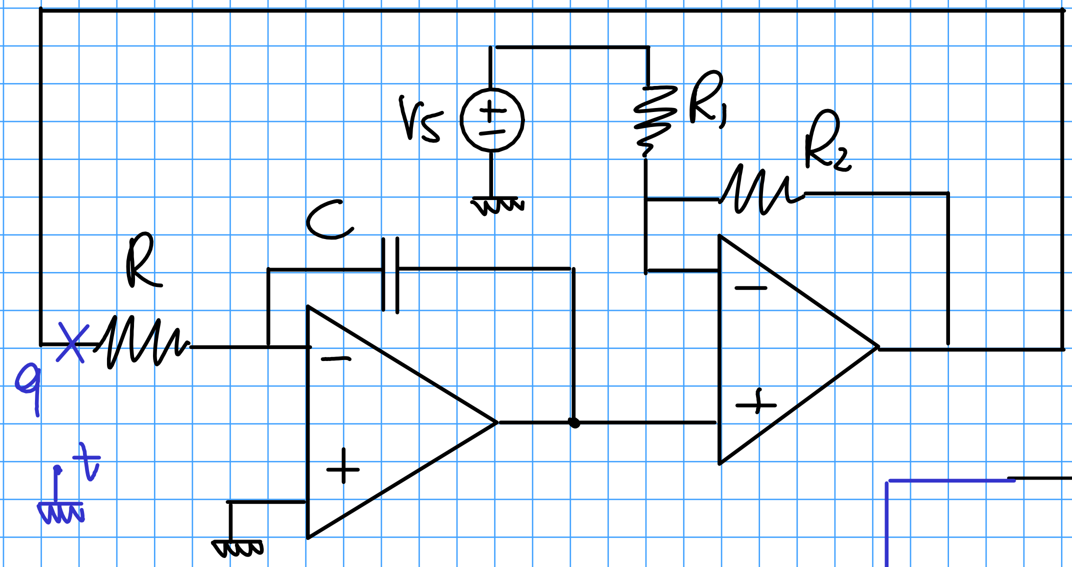


polo e zero

Hp polo prima $\beta_0 A_0 < \emptyset$

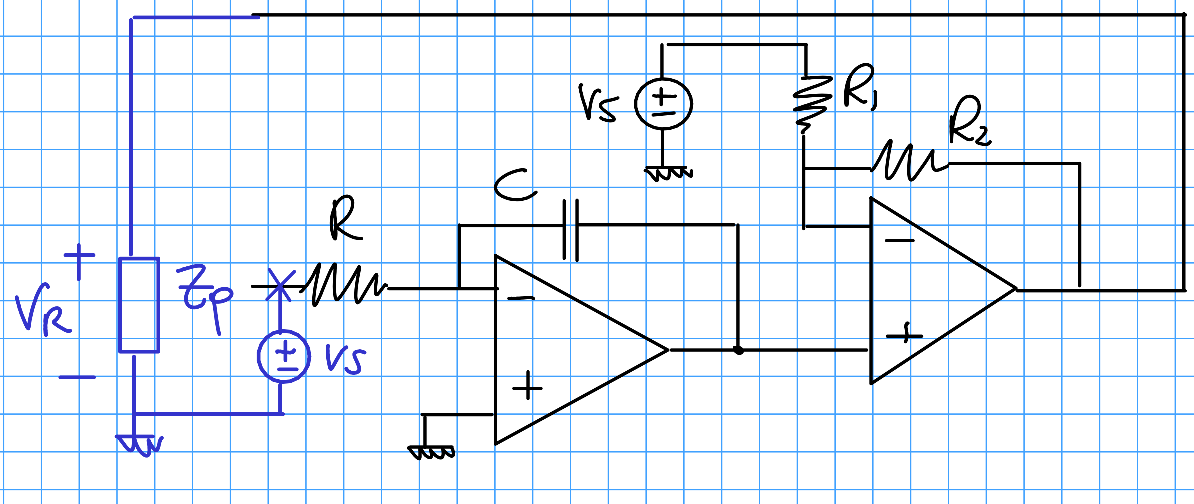


Come considero polo nell'origine? entra o no nel tracciato T?



circuito fornisce polo nell'origine

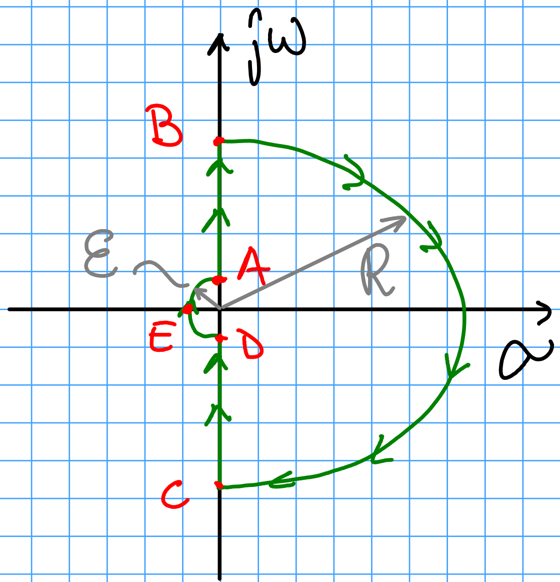
scomposizione



$$\beta A = -\frac{1}{RCs}\left(1+\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Come rappresento in Nyquist?

→ modifico percorso T in modo da includere/escludere la singolarità



rappresento s come var complessa a parte reale e immaginaria

polo origine incluso in Γ

⟶ per la stabilità devo avere alla fine 1 giro antiorario! ovvero considero polo origine come polo instabile

$\varepsilon \to \emptyset$

$R \to +\infty$

Studio per punti l'andamento di βA

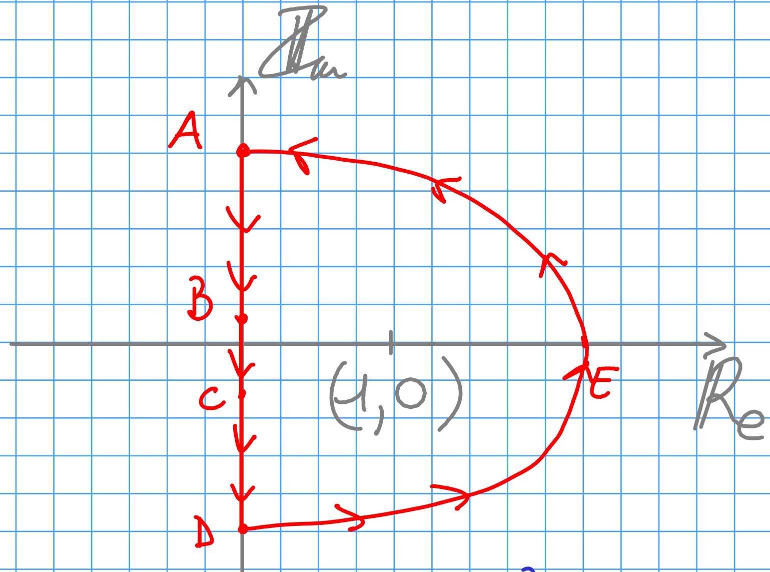
$A(0,\varepsilon) \longrightarrow \beta A = -\frac{K}{j\varepsilon} = j\frac{K}{\varepsilon} \longrightarrow$ "$j\infty$"

$B(0,R) \longrightarrow \beta A = -\frac{K}{jR} = j\frac{K}{R} \longrightarrow$ "$j\emptyset$"

$C(0,-R) \longrightarrow \beta A = -j\frac{K}{R} \longrightarrow$ "$-j\emptyset$"

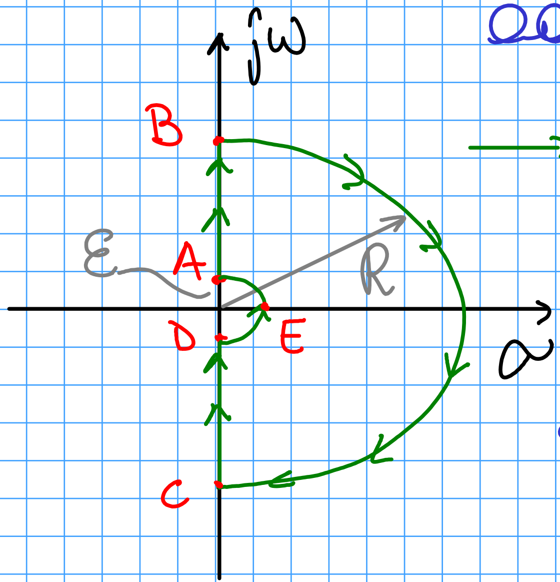
$D(0,-\varepsilon) \longrightarrow \beta A = -j\frac{K}{\varepsilon} \longrightarrow$ "$-j\infty$"

$E(-\varepsilon,0) \longrightarrow \beta A = K/\varepsilon \longrightarrow$ "$+\infty$"



si ottiene 1 giro antiorario attorno a (-1,0), quindi sistema è stabile

acvin.it



adesso escludo polo origine da percorso Γ

→ per la stabilità devo ~~non~~ devo avere rotazioni attorno a (-1,0)

considero polo origine come polo stabile

$\varepsilon \to 0$

$R \to +\infty$

come prima: studio per punti l'andamento di βA

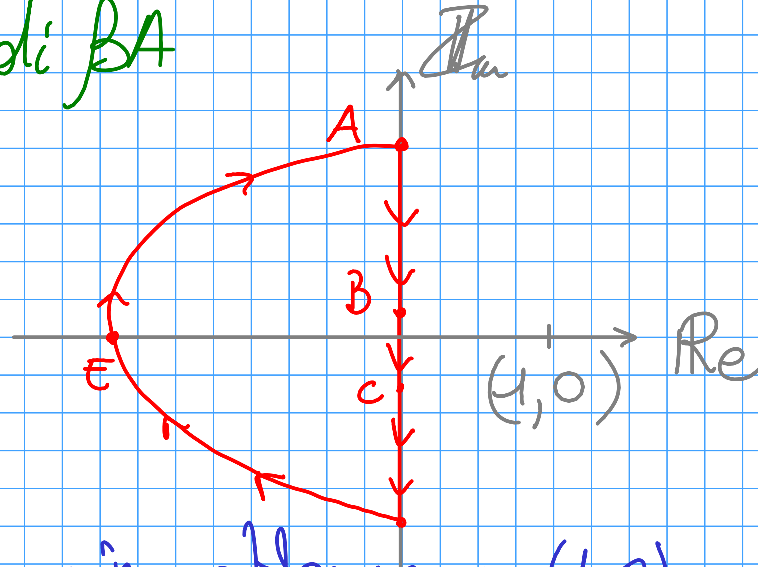
$A(0,\varepsilon) \longrightarrow \beta A = -\frac{K}{j\varepsilon} = j\frac{K}{\varepsilon} \longrightarrow$ "$j\infty$"

$B(0,R) \longrightarrow \beta A = -\frac{K}{jR} = j\frac{K}{R} \longrightarrow$ "$j0$"

$C(0,-R) \longrightarrow \beta A = -j\frac{K}{R} \longrightarrow$ "$-j0$"

$D(0,-\varepsilon) \longrightarrow \beta A = -j\frac{K}{\varepsilon} \longrightarrow$ "$-j\infty$"

$E(-\varepsilon,0) \longrightarrow \beta A = K/\varepsilon \longrightarrow$ "$-\infty$"



nessun giro attorno a (-1,0)
sistema stabile

$\boxed{\text{sistema stabile comunque consideri il polo nell'origine}}$